NOTE III.

Sur l'approximation de la proposition XVI, livre IV.

Dès qu'on a trouvé un rayon excédent et un déficient qui s'accordent dans les premiers chiffres, on peut achever le calcul d'une maniere très-prompte par le moyen d'une formule algébrique.

Soit a le rayon déficient et b l'excédent, dont la différence est petite; soient a' et b' les rayons suivants qui s'en déduisent par les formules $b' = \sqrt{ab}$, $a' = \sqrt{\left(a.\frac{a+b}{2}\right)}$

Ce que l'on cherche, c'est le dernier terme de la suite a, a', a'', etc., qui est en même temps celui de la suite b, b', b'', etc. Appelons ce dernier terme x, et soit $b = a(1+\omega)$; on pourra supposer $x = a(1 + P\omega + Q\omega^2 + \text{etc.})$, P et Q étant des coëfficients indéterminés. Or les valeurs de b' et a' donnent

$$b' = a\left(1 + \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{8}\omega^2 + \text{etc.}\right);$$
$$a' = a\left(1 + \tfrac{1}{4}\omega^2 - \tfrac{1}{32}\omega^2 + \text{etc.}\right).$$

Et si on fait pareillement $b' = a'(1+\omega')$, on aura

$$\omega' = \tfrac{1}{4}\omega - \tfrac{58}{32}\omega^2 \text{ etc.}$$

Mais la valeur de x doit être la même, soit que la suite a, a', a'', etc. commence par a ou par a'; donc on aura

$$a(1 + P\omega + Q\omega^2 + \text{etc.}) = a'(1 + P\omega' + Q\omega'^2 + \text{etc.}).$$

Substituant dans cette équation les valeurs de a' et de ω' en a et ω, et comparant les termes semblables, on en déduira $P = \frac{1}{3}$, et $Q = -\frac{1}{15}$; donc

$$x = a\left(1 + \tfrac{1}{3}\omega - \tfrac{1}{15}\omega^2\right).$$

Si les rayons a et b s'accordent dans la premiere moitié de leurs chiffres, on pourra rejeter le terme ω^2, et la valeur précédente se réduira à $x = a\left(1 + \frac{1}{3}\omega\right) = a + \frac{b-a}{3}$

Ainsi, en faisant $a = 1,1282657$, et $b = 1,1286063$, on en déduira immédiatement $x = 1,1283792$.

Si les rayons a et b ne s'accordent que dans le premier tiers de leurs chiffres, il faudra prendre les trois termes de la formule précédente; ainsi en faisant $a = 1,1265639$ et $b = 1,1320149$, on trouvera $x = 1,1283791$.

On pourrait supposer que a et b sont encore moins près l'un de l'autre; mais alors il faudrait calculer la valeur de x avec un plus grand nombre de termes.

L'approximation de la prop. XIV, qui est de Jacques Gregory, est susceptible de semblables abrégés. Nous renvoyons à l'ouvrage de cet auteur, intitulé : *Vera circuli et hyperbolæ quadratura*, ouvrage d'un grand mérite pour le temps où il a paru.

NOTE IV.

Où l'on démontre que le rapport de la circonférence au diametre et son quarré, sont des nombres irrationnels.

Considérons la suite infinie

$$1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}.\frac{a^2}{z.z+1}+\frac{1}{2.3}.\frac{a^3}{z.z+1.z+2}+\text{etc.}$$

dont le terme général est $\frac{1}{1.2.3\ldots n}.\frac{a^n}{z.z+1.z+2\ldots.(z+n-1)}$ et supposons que $\varphi:z$ en représente la somme. Si on met $z+1$ à la place de z, $\varphi:(z+1)$ sera pareillement la somme de la suite

$$1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}.\frac{a^2}{z+1.z+2}+\frac{1}{2.3}.\frac{a^3}{z+1.z+2.z+3}+\text{etc.}$$

Retranchons ces deux suites, terme à terme, l'une de l'autre, et nous aurons $\varphi:z-\varphi:(z+1)$ pour la somme du reste qui sera

$$\frac{a}{z.z+1}+\frac{a^2}{z.z+1.z+2}+\frac{1}{2}.\frac{a^3}{z.z+1.z+2.z+3}+\text{etc.}$$

Mais ce reste peut être mis sous la forme

$$\frac{a}{z.z+1}.\left(1+\frac{a}{z+2}+\frac{1}{2}.\frac{a^2}{z+2.z+3}+\text{etc.}\right);$$

et alors il se réduit à $\frac{a}{z.z+1}\varphi:(z+2)$. Donc on aura généralement

$$\varphi:z-\varphi:(z+1)=\frac{a}{z.z+1}\varphi:(z+2).$$

Divisons cette équation par $\varphi:(z+1)$, et, pour simplifier le résultat, soit $\psi:z$ une nouvelle fonction de z telle