NOTE VI.

Sur la plus courte distance de deux droites non situées dans le même plan.

fig. 280. Soient AB, CD, deux droites données, non situées dans le même plan, dont il s'agit de trouver la plus courte distance.

Suivant AB faites passer deux plans perpendiculaires entre eux qui rencontrent CD l'un en C, l'autre en D; des points C et D abaissez CA et DB perpendiculaires sur AB; dans le plan ABD menez DE parallele et AE perpendiculaire à BA, ce qui formera le rectangle ABDE; dans le plan CAE joignez CE et menez AI perpendiculaire à CE; enfin dans le plan CDE menez IK parallele à DE jusqu'à la rencontre de CD en K, faites AL = IK et joignez KL; je dis, 1° que la droite KL est perpendiculaire à-la-fois aux deux droites données AB, CD; 2° que cette même droite KL est plus courte que toute autre qui joindrait deux points des lignes AB, CD, et qu'ainsi KL, ou son égale AI, est la plus courte distance demandée.

En effet, 1° les trois droites AB, AC, AE étant par construction perpendiculaires entre elles, l'une d'elles AB est perpendiculaire au plan des deux autres; donc AB est perpendiculaire à AI; d'ailleurs KI est parallele à DE, et DE à AB, donc KI est parallele à AB, et puisqu'on a fait AL = KI, il s'ensuit que la figure AIKL est un rectangle. Cela posé, l'angle AIK est droit ainsi que AIC, donc la droite AI est perpendiculaire au plan KIC ou CDE; donc sa parallele KL est perpendiculaire au même plan CDE, et par conséquent est perpendiculaire à CD. Donc, 1° la droite KL est perpendiculaire à-la-fois aux deux droites AB, CD.

2° Soit M un point quelconque de la droite CD; si par ce point on mene MN parallele à DE ou à AB, la distance du point M à la droite AB sera égale à AN, puisque l'angle BAN est droit. Or on a AN > AI; donc AI est la plus courte distance des lignes données AB, CD.

Soient les perpendiculaires CA = a, et DB = AE = b,

on aura $CE = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; et parce que l'aire du triangle ACE s'exprime également par $\frac{1}{2}$ AC × AE et par $\frac{1}{2}$ CE × AI, on aura $AI = \frac{AC \times EA}{CE} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. C'est l'expression de la plus courte distance des lignes données.

Si en même temps on fait la distance $AB = c$, et qu'on appelle A l'angle compris entre les deux lignes données, c'est-à-dire l'angle CDE, compris entre la ligne CD et une parallele DE à la ligne AB, le triangle CDE rectangle en E donnera $\cos CDE = \frac{DE}{CD}$, ou $\cos A = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$; car on a $\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 = a^2 + b^2 + c^2$. De là on tirerait aussi $\sin A = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$. et $\cot A = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$;

NOTE VII.

Sur les polyèdres symmétriques.

C'est pour plus de simplicité que nous avons supposé dans la déf. 16, liv. VI, que le plan auquel les polyèdres symmétriques sont rapportés, est le plan d'une face : on pourrait supposer que ce plan est un plan quelconque, et alors la définition deviendrait plus générale, sans qu'il y eût rien à changer à la démonstration de la propos. 11, par laquelle nous avons établi les relations mutuelles des deux polyèdres. On peut aussi prendre une idée très-juste de la maniere d'être de ces deux solides, en regardant l'un des deux comme l'image de l'autre formée dans un miroir plan, lequel tiendra lieu du plan dont nous venons de parler.

NOTE VIII.

Sur la proposition XXV, livre VII.

Ce théorême qu'Euler a démontré le premier dans les Mémoires de Pétersbourg, année 1758, offre plusieurs conséquences qui méritent d'être développées.

1° Soit a le nombre des triangles, b le nombre des qua-