$2 \cos q \cos p \cos \frac{1}{2} c$, $1 - \cos c = 2 \cos^2 \frac{1}{2} c$, $\sin b \sin C = \sin c \sin B = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c \sin B$; on aura

$$\cot \tfrac{1}{2} S = \frac{\cos \frac{1}{2} c + \cos p \cos q}{\sin a \sin \frac{1}{2} c \sin B}.$$

D'ailleurs dans le triangle rectangle BCD, on a encore $\sin a \sin B = \sin q$; donc $\cot \frac{1}{2} S = \dfrac{\cos \frac{1}{2} c + \cos p \cos q}{\sin \frac{1}{2} c \sin q}$, ou $\cos p \cos q = \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c \sin q - \cos \frac{1}{2} c$; c'est la relation entre p et q qui doit déterminer la ligne sur laquelle sont situés tous les points C.

Ayant prolongé IP d'une quantité $PK = x$, joignez KC et soit $KC = y$; dans le triangle PKC, où l'on a $PC = \frac{1}{2}\pi - q$ et l'angle $KPC = \pi - p$, le côté KC se trouvera par la formule $\cos KC = \cos KPC \sin PK \sin PC + \cos PK \cos PC$, ou

$$\cos y = \sin q \cos x - \sin x \cos q \cos p;$$

dans laquelle substituant au lieu de $\cos q \cos p$ sa valeur $\cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c \sin q - \cos \frac{1}{2} c$, on aura

$\cos y = \sin x \cos \frac{1}{2} c + \sin q \left(\cos x - \sin x \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c\right)$.

De là on voit que si l'on prend $\cos x - \sin x \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c = 0$, ou $\cot x = \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c$, on aura $\cos y = \sin x \cos \frac{1}{2} c$, et ainsi la valeur de y deviendra constante.

Donc si après avoir mené l'arc IP perpendiculaire sur le milieu de la base AB, on prend au-delà du pole la partie PK telle que $\cot PK = \cot \frac{1}{2} S \sin \frac{1}{2} c$, tous les sommets des triangles qui ont la même base c et la même surface S, seront situés sur le petit cercle décrit du point K comme pole à la distance KC telle que $\cos KC = \sin PK \cos \frac{1}{2} c$.

Ce beau théorême est dû à Lexell. (Voyez le tome V, part. I des *nova Acta Petropolitana.*)

NOTE XI.

Sur la proposition III, livre VIII.

Cette proposition peut être démontrée plus rigoureusement en la ramenant aux lemmes préliminaires, de la maniere suivante.

Je dis d'abord que la surface convexe terminée par les
fig 252. arêtes AF, BG, et par les arcs AuB, FxG, ne saurait

être plus petite que le rectangle ABGF, partie correspondante de la surface du prisme inscrit.

En effet, soit S la surface convexe dont il s'agit, et soit, s'il est possible, le rectangle ABGF ou $AB \times AF = S + M$, M étant une quantité positive.

Prolongez la hauteur AF du prisme et du cylindre jusqu'à une distance AF′ égale à n fois AF, n étant un nombre entier quelconque; si l'on prolonge en même temps le cylindre et le prisme, il est clair que la surface convexe S′ comprise entre les arêtes AF′, BG′, contiendra n fois la surface S; de sorte qu'on aura $S' = nS$, et parceque $n \times AF = AF'$, on aura $AB \times AF' = nS + nM = S' + nM$. Or n étant un nombre entier à volonté et M une surface donnée, on peut prendre n de maniere qu'on ait nM plus grand que le double du segment AuB, puisqu'il suffit pour cela de faire $n > \frac{2AuB}{M}$; donc alors le rectangle $AB \times AF'$ ou la surface plane ABG′F′ serait plus grande que la surface enveloppante, composée de la surface convexe S′ et de deux segments circulaires égaux AuB, $F'x'G'$. Or, au contraire, la seconde surface est plus grande que la premiere, suivant le premier lemme préliminaire; donc, 1° on ne peut avoir $S < ABGF$.

Je dis en second lieu que la même surface convexe S ne saurait être égale à celle du rectangle ABGF. Car supposons, s'il est possible, qu'en prenant $AE = AB$, la surface convexe AMK soit égale au rectangle AFKE; par un point quelconque M de l'arc AME, menez les cordes AM, ME, et élevez MN perpendiculaire sur le plan de la base. Les trois rectangles AMNF, MEKN, AEKF, ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases AM, ME, AE. Or on a $AM + ME > AE$, donc la somme des rectangles AMNF, MEKN est plus grande que le rectangle AFKE. Celui-ci est équivalent par hypothese à la surface convexe AMK, composée des deux surfaces partielles AN, MK. Donc la somme des rectangles AMNF, MEKN est plus grande que la somme des surfaces convexes correspondantes AN, MK. Donc il faudra que l'un au moins des rectangles AMNF, MEKN soit plus grand que la surface convexe

correspondante. Cette conséquence est contraire à la premiere partie déja démontrée. Donc, 2° la surface convexe S ne saurait être égale à celle du rectangle correspondant ABGF.

Il suit de là qu'on a S > ABGF, et qu'ainsi la surface convexe du cylindre est plus grande que celle de tout prisme inscrit.

Par un raisonnement absolument semblable, on prouvera que la surface convexe du cylindre est plus petite que celle de tout prisme circonscrit.

NOTE XII.

Sur l'égalité et la similitude des polyèdres.

On trouve à la tête du XIe livre d'Euclide, les définitions 9 et 10 ainsi conçues :

9. *Deux solides sont semblables, lorsqu'ils sont compris sous un même nombre de plans semblables chacun à chacun.*

10. *Deux solides sont égaux et semblables, lorsqu'ils sont compris sous un même nombre de plans égaux et semblables chacun à chacun.*

L'objet de ces définitions étant un des points les plus difficiles des éléments de géométrie, nous l'examinerons avec quelque détail, et nous discuterons en même temps les remarques faites à ce sujet par Robert Simson dans son édition des éléments, pag. 388 et suiv.

D'abord nous observerons avec Robert Simson que la définition 10 n'est pas proprement une définition, mais bien un théorême qu'il faudrait démontrer; car il n'est pas évident que deux solides soient égaux par cela seul qu'ils ont les faces égales; et si cette proposition est vraie, il faut la démontrer soit par la superposition, soit de toute autre maniere. On voit ensuite que le vice de la définition 10 est commun à la définition 9. Car, si la définition 10 n'est pas démontrée, on pourra croire qu'il existe deux solides inégaux et dissemblables dont les faces sont égales; mais alors, suivant la définition 9, un troisieme solide qui aurait les faces semblables à celles des deux premiers serait semblable à chacun d'eux, et ainsi serait semblable à deux