Or, on est maître de rendre positif le numérateur de cette dernière quantité; car supposons que a, b, c, d, soient écrites dans l'ordre de leur grandeur, les racines négatives venant après les positives, alors les différences $a-b$, $a-c$, etc. seront toutes positives, et $p-q$ sera réel. On aura encore $p-q$ réel, si on prend pour a et b les extrêmes en grandeur des racines a, b, c, d. Enfin, la troisième combinaison donnerait $p-q$ imaginaire.

Donc par la substitution de $x=\frac{p+qy}{1+y}$, il est toujours possible de faire disparaître les puissances impaires de la variable sous le radical, et en même temps on obtient cet avantage, que les deux facteurs, sous le nouveau radical, sont réels et de la forme $f+gy^2$, ce qui est un point essentiel, et qu'on n'obtiendrait pas toujours par la première méthode.

Remarquons qu'il y a deux cas particuliers à examiner.

1°. Lorsque l'une des racines a et b est égale à l'une des racines c et d, le radical R se simplifie, et l'intégrale ne dépend plus que des arcs de cercle et des logarithmes.

2°. Si l'on a $a+b=c+d$, il suffit d'une simple permutation pour cesser d'avoir $a+b=c+d$; mais on peut aussi profiter de cette circonstance pour faciliter la transformation. En effet, les deux facteurs de la quantité sous le radical étant alors de la forme $\lambda+\nu(x^2+2mx)$, $\zeta+\theta(x^2+2mx)$, il est clair que si on fait $x+m=y$, les puissances impaires de la variable disparaîtront.

Réduction de la différentielle $\frac{Pdx}{R}$ *à la forme* $\frac{Qd\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}}$.

(6). Puisque par une première préparation on peut faire ensorte qu'il n'y ait pas de puissances impaires de la variable sous le radical, nous ferons désormais $R=\sqrt{(\alpha+\beta x^2+\gamma x^4)}$. Nous supposerons aussi que P est une fonction paire de x; car quelle que soit la fonction rationnelle P, on peut toujours faire $P=M+Nx$, M et N étant des fonctions paires de x: or la partie $\frac{Nxdx}{R}$ se ramène aux règles ordinaires, en faisant $x^2=y$; ainsi toute la difficulté se réduit à intégrer la formule $\frac{Mdx}{R}$, dans laquelle M est une fonction paire de x.

Cela posé, nous allons prouver par l'énumération des différens cas, que la différentielle $\frac{dx}{R}$ peut toujours se ramener à la forme $\frac{m d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2.\varphi)}}$, où l'on a c plus petit que l'unité.

Premier cas. Supposons les facteurs de $\alpha+\epsilon x^2+\gamma x^4$ imaginaires, et représentons cette quantité par $\lambda^2+2\lambda\mu x^2\cos\theta+\mu^2x^4$, λ et μ étant positifs, et $\cos\theta$ pouvant être positif ou négatif. On fera $x=\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}.\tan\frac{1}{2}\varphi$, et prenant $c=\sin\frac{1}{2}\theta$, on aura la transformée

$$\frac{dx}{R}=\frac{1}{2\sqrt{\lambda\mu}}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

Second cas. Soit $\alpha+\epsilon x^2+\gamma x^4=m^2(1+p^2x^2)(1-q^2x^2)$; la limite de x étant $\frac{1}{q}$, on fera $x=\frac{1}{q}\cos\varphi$ et $\frac{p^2}{p^2+q^2}=c^2$, ce qui donnera

$$\frac{dx}{R}=\frac{c}{mp}\cdot\frac{-d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

Si on voulait que la transformée fût positive, il faudrait faire $\cot\varphi=\sqrt{(1-c^2)}\tang\Psi$, ce qui donne directement

$$x^2=\frac{\sin^2\Psi}{q^2+p^2\cos^2\Psi},$$

et la transformée serait

$$\frac{dx}{R}=\frac{c}{mp}\cdot\frac{d\Psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\Psi)}}.$$

Troisième cas. Soit $\alpha+\epsilon x^2+\gamma x^4=m^2(1+p^2x^2)(x^2-q^2)$, on fera $x=\frac{q}{\cos\varphi}$, $\frac{1}{1+p^2q^2}=c^2$, et on aura

$$\frac{dx}{R}=\frac{c}{m}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

Quatrième cas. Soit $\alpha+\epsilon x^2+\gamma x^4=m^2(1+p^2x^2)(1+q^2x^2)$, on supposera $p>q$, et faisant $x=\frac{\tang\varphi}{p}$, $\frac{p^2-q^2}{p^2}=c^2$, on aura

$$\frac{dx}{R}=\frac{1}{mp}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

Cinquième cas. Soit $\alpha+\epsilon x^2+\gamma x^4=m^2(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)$,

on supposera $p > q$, et faisant $px = \sin\varphi$, $\frac{q}{p} = c$, la transformée sera

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}.$$

Cette formule servira depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{p}$; le radical R serait imaginaire depuis $x = \frac{1}{p}$ jusqu'à $x = \frac{1}{q}$; mais il redevient réel depuis $x = \frac{1}{q}$ jusqu'à $x = \infty$. Dans ce dernier cas, il faut écrire $R^2 = m^2(p^2x^2-1)(q^2x^2-1)$, et faisant $qx = \frac{1}{\sin\varphi}$, $\frac{q}{p} = c$, la transformée sera $\frac{-d\varphi}{mp\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$. Si on veut qu'elle soit positive, il faudra, comme ci-dessus, faire $\cot\varphi = \sqrt{(1-c^2)}.\tang\Psi$, ce qui donnera directement $x^2 = \frac{1-c^2\sin^2\Psi}{q^2\cos^2\Psi}$, et la transformée sera

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp} \cdot \frac{d\Psi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\Psi)}},$$

formule absolument semblable à la première; d'où il suit que l'intégrale de $\frac{dx}{R}$ pour le cas de $x > \frac{1}{q}$, se déduira toujours de la même intégrale, prise en supposant $x < \frac{1}{p}$.

Sixième cas. Enfin, soit $\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 = m^2(x^2-q^2)(p^2-x^2)$; alors x doit être compris entre p et q. Soit $p > q$, et soit fait $x = \frac{q}{\cos\Psi}$, on aura d'abord $\frac{dx}{R} = \frac{d\Psi}{m\sqrt{(p^2-q^2-p^2\sin^2\Psi)}}$. Dans cette formule, l'angle Ψ a une limite; pour en introduire un indéfini, soit $\sin\Psi = c\sin\varphi$ et $c^2 = \frac{p^2-q^2}{p^2}$, on aura la transformée

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},$$

à laquelle on serait parvenu directement en faisant

$$x^2 = \frac{q^2}{1-c^2\sin^2\varphi}.$$

(7). On peut remarquer maintenant, qu'abstraction faite du premier cas, les valeurs de x^2 qui opèrent la réduction cherchée, sont tou-

jours de la forme $\frac{A+B\sin^2\varphi}{C+D\sin^2\varphi}$, où les coefficiens sont constans. Il ne s'agit plus que de substituer cette valeur de x^2 dans P, et la formule $\int\frac{Pdx}{R}$ sera transformée en une autre $\int\frac{Qd\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$, dans laquelle c sera plus petit que l'unité, et Q sera une fonction rationnelle paire de sin φ, laquelle contiendra sin φ au même degré que P contient x.

Nous faisons abstraction du premier cas, parce que la forme de la valeur de x est un peu différente, et que d'ailleurs en suivant la méthode de l'article 5, on évite ce cas, puisqu'on tombe toujours sur des facteurs réels. Mais nous reviendrons dans un autre article sur le cas des facteurs imaginaires.

Développement de la formule $\int\frac{Qd\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$.

(8). Nous représenterons dorénavant le radical $\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}$ par Δ, et aussi par $\Delta(\varphi)$ et $\Delta(c,\varphi)$, lorsqu'on le regardera comme fonction de φ, ou comme fonction de c et φ.

Considérons d'abord le cas où Q serait une fonction entière, et soit $Q=A+B\sin^2\varphi+C\sin^4\varphi+$ etc.; si on représente pour abréger, l'intégrale $\int\frac{\sin^{2k}\varphi\,.\,d\varphi}{\Delta}$ par Z^{2k}, on aura

$$\int\frac{Qd\varphi}{\Delta}=AZ^0+BZ^2+CZ^4+\text{ etc.}$$

Mais en différentiant la quantité $\Delta\cos\varphi\sin^{2k-3}\varphi$, on trouve aisément la formule

$$\Delta\cos\varphi\sin^{2k-3}\varphi=(2k-3)Z^{2k-4}-(1+c^2)(2k-2)Z^{2k-2}+c^2(2k-1)Z^{2k};$$

d'où il suit que Z^4, Z^6, etc. peuvent s'exprimer au moyen de Z^0 et Z^2, et qu'ainsi dans le cas où Q est une fonction entière, l'intégrale $\int\frac{Qd\varphi}{\Delta}$ est égale à une quantité algébrique, plus une intégrale de la forme $f(A+B\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta}$.

(9). Soit maintenant Q une fonction quelconque rationnelle de $\sin^2\varphi$; après avoir extrait la partie entière, et l'avoir traitée comme