Théorème sur les fonctions de première et de seconde espèce, dont les modules sont complémens l'un de l'autre.

(42). Dans les comparaisons qu'on vient d'établir entre les fonctions $F^1(c)$, $E^1(c)$, qui se rapportent au module $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})} = \sin 15°$, et les fonctions $F^1(b)$, $E^1(b)$, qui se rapportent au module complémentaire $b = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})} = \cos 15°$, les trois équations trouvées conduisent à ce résultat remarquable

$$\frac{\pi}{2} = F^1(c)\,E^1(b) + F^1(b)\,E^1(c) - F^1(b)\,F^1(c) \ldots\ldots (d')$$

où l'on voit que les deux quantités b, c peuvent être échangées entre elles, et qu'ainsi cette équation est vérifiée dans deux cas, celui de $c = \sin 15°$, et celui de $c = \sin 75°$. Il serait facile de démontrer directement qu'elle est encore vraie dans deux autres cas, lorsque c est infiniment petit, et lorsque $c = \sqrt{\frac{1}{2}} = b$; mais nous allons prouver généralement qu'elle a lieu quel que soit c.

Pour abréger la notation, désignons simplement par F, E, les quantités $F^1(c)$, $E^1(c)$, et par F′, E′ les quantités $F^1(b)$, $E^1(b)$, et supposons

$$P = FE' + F'E - FF',$$

P étant une fonction de c encore inconnue.

Je différentie les deux membres par rapport à c qui est la seule variable qu'ils contiennent. Or ayant $E(\varphi) = \int \Delta d\varphi$, $F(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$, $\Delta^2 = 1 - c^2 \sin^2\varphi$, la différentiation donne

$$\frac{dE}{dc} = -\int \frac{c d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta} = \frac{1}{c}(E - F)$$

$$\frac{dF}{dc} = \int \frac{c d\varphi \sin^2\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{c}\int \frac{d\varphi}{\Delta^3} - \frac{1}{c}\int \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Mais par les formules de l'art. 9, on a $\int \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{b^2}\int \Delta d\varphi - \frac{c^2 \sin\varphi\cos\varphi}{b^2\Delta}$, et dans le cas de $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ dont il s'agit, le second terme s'évanouit : ainsi on aura

$$\frac{dF}{dc} = \frac{1}{b^2 c}(E - b^2 F).$$

On aura semblablement $\frac{dE'}{db} = \frac{1}{b}(E' - F')$, $\frac{dF'}{db} = \frac{1}{c^2 b}(E' - c^2 F')$, et parce que $bdb + cdc = 0$, on en déduira

$$\frac{dE'}{dc} = -\frac{c}{b^2}(E' - F')$$
$$\frac{dF'}{dc} = -\frac{1}{b^2 c}(E' - c^2 F').$$

Substituant ces valeurs dans celle de dP, on aura $dP = 0$; donc $P = \text{const.}$ Mais on a trouvé dans un cas particulier $P = \frac{1}{2}\pi$; donc l'équation (d') a lieu généralement, quel que soit c.

Lorsque $c = \sqrt{\frac{1}{2}} = b$, l'équation (d') donne

$$\frac{\pi}{2} = F^1(2E^1 - F^1).$$

Ainsi dans ce cas particulier, E^1 se détermine encore par F^1.

Il peut y avoir quelques autres cas particuliers où la fonction de seconde espèce $E^1(c)$ s'exprime par la fonction de seconde espèce $F^1(c)$; nous ferons voir en effet que chaque cas particulier connu en fait connaître une infinité d'autres; mais la détermination générale paraît impossible d'après les recherches suivantes.

Equations différentielles qui expriment la liaison mutuelle des fonctions E et F.

(43). Si l'on différentie par rapport à c les deux formules $E = \int \Delta d\varphi$, $F = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$, on aura comme ci-dessus,

$$\frac{dE}{dc} = \int \frac{-cd\varphi \sin^2\varphi}{\Delta} = \frac{1}{c}(E - F)$$
$$\frac{dF}{dc} = \frac{1}{b^2 c}(E - b^2 F) - \frac{c}{b^2} \cdot \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}.$$

Il en résulte les deux formules

$$F = F - c\frac{dE}{dc}$$
$$E = b^2\left(E + c\frac{dF}{dc}\right) + \frac{c^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}, \quad \ldots\ldots\ldots(e')$$

qui contiennent les relations mutuelles des fonctions E et F.