fonctions elliptiques complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$, au moyen de la formule de réduction que nous avons rapportée.

La formule générale de la case V se déduit de celle de la case IV, en mettant $\frac{1}{2}\pi - \beta$ au lieu de α, et $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ au lieu de β, ce qui ne change point la valeur du module c, ni par conséquent celles des fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$.

Les formules de ces deux cases serviront à trouver en général la valeur des intégrales $\int \frac{d\omega}{MN} \tang^{2n}\omega$, $\int \frac{d\omega}{MN} \cot^{2n}\omega$, et aussi celle de l'intégrale $\int \frac{d\omega}{MN \sin^{2n}\omega \cos^{2m}\omega}$, puisque ces diverses intégrales peuvent être décomposées en une suite finie de termes compris dans les cases IV et V.

CASE VI.

(10). La même substitution dont on a fait usage dans les deux cases précédentes donne la formule

$$\int \frac{d\omega \sin^{2n}\omega}{MN} = \frac{\sin^{2n}\alpha}{\cos\alpha \sin\beta} \cdot \frac{d\varphi}{(1 - c^2\cos^2\alpha \sin^2\varphi)^n \Delta},$$

intégrale qui doit toujours être prise entre les limites $\varphi = 0$; $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Cette intégrale peut en général s'exprimer par les fonctions complètes $F^1(c)$, $E^1(c)$, $\Pi^1(-c^2\cos^2\alpha, c)$, au moyen de la formule de réduction rapportée dans la case VI, formule qui est déduite de celle de l'art. 9, première Partie. On peut aussi substituer à la fonction de troisième espèce Π^1, sa valeur en fonctions de la première et de la deuxième espèce, donnée par la formule du n° 105; cette valeur est (en supprimant le module c commun à ces fonctions)

$$\Pi^1(-c^2\cos^2\alpha) = F^1 + \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin^2\alpha}\left[F^1E(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) - E^1F(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\right].$$

Si on observe ensuite que d'après l'équation $1 = b\tang(\frac{1}{2}\pi - \alpha)\tang\beta$, on a (n° 57)

$$F(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = F^1 - F(\beta)$$
$$E(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = E^1 - E(\beta) + c^2\cos\alpha \sin\beta,$$

la valeur de Π^1 pourra s'exprimer ainsi :

$$\Pi^1(-c^2\cos^2\alpha)=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}F^1+\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin^2\alpha}[E^1F(\beta)-F^1E(\beta)];$$

de sorte que les intégrales de la case VI ne dépendront que des fonctions F^1, E^1, $F(\beta)$, $E(\beta)$.

(11). Le cas de $\alpha=0$ mérite d'être développé. Alors on a immédiatement

$$\int\frac{d\omega\sin^2\omega}{MN}=\int\frac{d\omega\sin\omega}{\sqrt{(\cos^2\omega-\cos^2\beta)}}.$$

Soit $\cos\omega=\frac{\cos\beta}{\cos\varphi}$, on aura la transformée $\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)$, dans laquelle il faut faire $\varphi=\beta$, ce qui donnera

$$\int\frac{d\omega\sin\omega}{\sqrt{(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right).$$

Ce résultat se déduit également de la formule générale

$$\int\frac{d\omega\sin^2\omega}{MN}=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}F^1+E^1F(\beta)-F^1E(\beta);$$

mais pour cela, au lieu de faire $\alpha=0$, nous ferons $\alpha=\varepsilon$, ε désignant un arc infiniment petit. On aura alors $c^2=1-\varepsilon^2\cot^2\beta$, $b=\varepsilon\cot\beta$,

$$F^1=\mathcal{L}\frac{4}{b},\qquad \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}=\sin\beta(1+\tfrac{1}{2}b^2\tang^2\beta),$$

$$E(\beta)=\sin\beta+\frac{b^2}{4}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right)-\frac{b^2}{2}\sin\beta.$$

De là on voit que $[\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}-E(\beta)]F^1$ s'évanouit lorsqu'on fait $b=0$; on a en même temps $E^1=1$ et $F(\beta)=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right)$.

Ainsi le second membre de l'équation précédente se réduit à $\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right)$, ce qui est le résultat déjà trouvé.

(12). Lorsque α est égal à la quantité infiniment petite ε, la fonction $\Pi^1(-c^2\cos^2\alpha)$ représente l'intégrale

$$\int\frac{d\varphi}{\left(\cos^2\varphi+\frac{\varepsilon^2}{\sin^2\beta}\sin^2\varphi\right)\sqrt{(\cos^2\varphi+\varepsilon^2\cot^2\beta\sin^2\varphi)}},$$

prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. On voit donc que cette intégrale se réduit dans ce cas à $\frac{\sin \beta}{2\varepsilon^2} \mathcal{L}\left(\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta}\right)$, formule qu'il serait assez difficile de vérifier par l'intégration directe.

Ce résultat suppose que β n'est pas lui-même infiniment petit; car si β était infiniment petit de l'ordre α, on aurait $c^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}$, $b = \frac{\alpha}{\beta}$, $E(\beta) = F(\beta) = \beta$, et la formule générale donnerait

$$\int \frac{d\omega \sin^2\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)} \cdot \sqrt{(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \beta E^1(c).$$

C'est ce qu'il est facile de vérifier par l'intégration directe. En effet, puisque α et β sont infiniment petits, la variable ω, toujours comprise entre ces deux quantités, est aussi infiniment petite; ainsi l'intégrale dont il s'agit est la même que

$$\int \frac{\omega^2 d\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)} \cdot \sqrt{(\beta^2 - \omega^2)}}.$$

Soit $\omega^2 = \alpha^2 \sin^2\varphi + \beta^2 \cos^2\varphi$, et $c^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}$; cette intégrale devient $\int \beta d\varphi \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\varphi)}$, ou $\beta E(c, \varphi)$, dans laquelle faisant $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on a pour résultat $\beta E^1(c)$.

CASE VII.

(13). Considérons la double intégrale

$$Z = \iint \frac{dp dq \sin p}{\cos^2 p + \cos^2\alpha \sin^2 p \cos^2 q + \cos^2\beta \sin^2 p \sin^2 q},$$

dans laquelle les limites de p, ainsi que celles de q, doivent être 0 et $\frac{1}{2}\pi$.

Si l'on intègre d'abord par rapport à q, on aura

$$Z = \frac{\pi}{2} \int \frac{dp \sin p}{\sqrt{(\cos^2 p + \cos^2\alpha \sin^2 p)} \cdot \sqrt{(\cos^2 p + \cos^2\beta \sin^2 p)}}.$$

Soit $\beta > \alpha$, et $\cos p = \cot\beta \tang\varphi$; si l'on fait $c^2 = 1 - \frac{\tang^2\alpha}{\tang^2\beta}$, on aura la transformée

$$Z = \frac{\pi}{2\cos\alpha \sin\beta} \int \frac{d\varphi}{\Delta},$$