EXERCICES
DE CALCUL INTÉGRAL.

SUPPLÉMENT A LA PREMIÈRE PARTIE.

Nous nous proposons, dans ce Supplément, de faire connaître un nouveau genre assez étendu d'intégrales définies, qui peuvent être exprimées, en partie par les fonctions elliptiques, en partie par les arcs de cercle et les logarithmes. Ces applications, jointes à toutes celles que nous avons données dans la première Partie, démontrent de plus en plus l'utilité et même la nécessité d'admettre les fonctions elliptiques dans le calcul intégral, au même titre que les arcs de cercle et les logarithmes. Mais on ne pourra jouir pleinement des avantages de cette innovation, que lorsqu'il existera des tables suffisamment étendues des fonctions de la première et de la seconde espèce. Nous avons déjà tracé sommairement le plan d'après lequel ces tables pourraient être construites. Nous reviendrons, dans une autre occasion, sur cet objet, et nous donnerons des formules propres à simplifier le travail et à fournir de nouveaux moyens d'exécution.

(1). Les formules que nous avons rassemblées dans ce Supplément étant assez nombreuses, nous avons cru devoir, pour plus de clarté, les ranger dans une table générale divisée en seize cases, qui forment autant de tables particulières. Par cette disposition on

aura l'avantage de saisir d'un coup d'œil l'ensemble des résultats, et de retrouver facilement ceux dont on pourrait avoir besoin.

Nous allons parcourir successivement les différentes cases, et faire voir par quels moyens on est parvenu aux formules qu'elles contiennent. Il en est quelques-unes qui pourront intéresser les géomètres, tant par leur nouveauté que par l'analyse qui les a fait découvrir.

CASE I.

(2). D'après les dénominations rapportées en tête de la case, si on fait $\sin^2\omega = \sin^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\beta\sin^2\varphi$, on aura généralement

$$\int\frac{d\omega\cos\omega\sin^{2n+1}\omega}{\mathrm{MN}} = \int d\varphi\,(\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\beta\sin^2\varphi)^n.$$

Mettant le second membre sous la forme $\sin^{2n}\beta\int d\varphi(1-k\cos^2\varphi)^n$, développant le binome et intégrant chaque terme par les formules connues, depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura pour résultat

$$\int\frac{d\omega\cos\omega\sin^{2n+1}\omega}{\mathrm{MN}} = \frac{\pi}{2}\sin^{2n}\beta\left(1 - nk.\tfrac{1}{2} + \frac{n.n-1}{2}k^2.\frac{1.3}{2.4} - \text{etc.}\right).$$

Le second membre pourrait encore être mis sous la forme $\frac{\pi}{2}\mathrm{X}^n$, X^n étant le coefficient de x^n dans le développement du produit $(1-x\sin^2\alpha)^{-\frac{1}{2}}(1-x\sin^2\beta)^{-\frac{x}{2}}$.

(3). La même substitution donnerait

$$\int\frac{d\omega\cos\omega}{\mathrm{MN}\sin^{2n+1}\omega} = \int\frac{d\varphi}{(\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\beta\sin^2\varphi)^{n+1}};$$

mais cette formule peut être mise sous une forme plus simple et débarrassée de fractions. Il suffit pour cela de faire directement

$$\sin^2\omega = \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\beta\sin^2\varphi},$$

et on obtient

$$\int\frac{d\omega\cos\omega}{\mathrm{MN}\sin^{2n+1}\omega} = \frac{1}{\sin^{2n+1}\alpha\sin^{2n+1}\beta}\int d\varphi\,(\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\beta\sin^2\varphi)^n,$$

l'intégrale en φ devant encore être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. On a donc généralement, quel que soit n, cette for-