Retranchons membre à membre ces deux dernières relations :

$$\int (U\Delta V - V\Delta U)\, d\tau = \int \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\omega.$$

Les fonctions U et V doivent être finies, continues et admettre des dérivées premières continues et également finies. Elles doivent avoir, en outre, des dérivées secondes finies et intégrables ; les discontinuités de ces dérivées, s'il y en a, doivent se trouver sur une surface algébrique.

Les théorèmes sont encore vrais pour des aires planes limitées par des contours fermés. On les exprime de même, en remplaçant les éléments de volume $d\tau$ par des éléments de surface et les éléments de surface $d\omega$ par des éléments du contour envisagé ; les intégrales triples deviennent doubles ; les doubles deviennent simples.

20. — Replaçons-nous dans l'espace à trois dimensions et faisons $U = 1$ dans la formule de Green ; elle deviendra :

$$\int \Delta V d\tau = \int \frac{dV}{dn}\, d\omega.$$

Faisons maintenant $U = V$, au lieu de $U = 1$; la formule de Green donnera :

$$\int U\Delta U d\tau = \int U \frac{dU}{dn}\, d\omega - \int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 d\tau.$$

Si, en outre, U satisfait à l'équation de Laplace $\Delta U = 0$, on obtiendra finalement :

$$\int U \frac{dU}{dn}\, d\omega = \int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 d\tau,$$

ce qui nous montre que l'intégrale $\int U \frac{dU}{dn}\, d\omega$ est positive. Ces formules seront utilisées dans la suite.

Tous les théorèmes que nous venons de démontrer s'appliquent à des volumes connexes, quel que soit leur ordre de con-

nexion ; ils s'appliquent, par exemple, à un volume doublement connexe comme celui qui est compris entre deux sphères concentriques ; mais, en appliquant les formules, il faut bien prendre garde au sens de la normale extérieure ; dans l'exemple cité, le volume est limité par les surfaces des deux sphères et les intégrales de surface doivent être étendues aux surfaces de ces deux sphères ; le sens de la *normale extérieure* sur la grande sphère est celui de la portion de normale qui sort de la sphère ; au contraire, sur la surface de la petite sphère, la normale extérieure au volume T est dirigée vers l'intérieur de la cavité, car c'est la direction dans laquelle on sort du volume T considéré.

21. — Comme application des considérations précédentes, prenons pour volume T le volume compris entre une sphère S de rayon a et une sphère S′ concentrique à la précédente et de rayon $\rho > a$.

Ecrivons la formule de Green dans ce cas :

$$(1) \qquad \int U \Delta V d\tau + \int \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = \int U \frac{dV}{dn} d\omega.$$

L'intégrale du deuxième membre est étendue à chacune des deux sphères S et S′ ; mais $\frac{dV}{dn}$ est, d'après ce que nous avons dit, la dérivée suivant la normale extérieure à S′ et la dérivée suivant la normale intérieure à S. Si nous prenons ces dérivées suivant les normales extérieures, dans les deux cas nous écrirons :

$$\int U \frac{dV}{dn} d\omega = \int_{(S')} U \frac{dV}{dn} d\omega - \int_{(S)} U \frac{dV}{dn} d\omega,$$

la première intégrale du deuxième membre étant étendue à la surface S′ et la deuxième à la surface S.

Supposons que, si ρ augmente indéfiniment, l'intégrale,

$$\int_{(S')} U \frac{dV}{dn} d\omega,$$

tende vers zéro. Alors l'égalité (1) se réduira à :

$$\int U \Delta V d\tau + \int \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = - \int_{(S)} U \frac{dV}{dn} d\omega.$$