Remarque. — Supposons que le point M s'éloigne indéfiniment, $\sum \frac{m}{r}$ tendra vers 0. Au contraire, $\sum m \log \frac{r_0}{r}$ tendra vers $-\infty$. Ainsi l'on peut dire qu'à l'infini le potentiel newtonien s'annule, au lieu que le potentiel logarithmique est égal à $-\infty$.

4. Equation de Laplace. — Formons les dérivées secondes $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, du potentiel newtonien en un point distinct des points attirants.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 3 \sum m \frac{(a-x)^2}{r^5} - \sum \frac{m}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 3 \sum m \frac{(b-y)^2}{r^5} - \sum \frac{m}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 3 \sum m \frac{(c-z)^2}{r^5} - \sum \frac{m}{r^3}.$$

Ajoutons ces trois relations membre à membre et appelons, suivant la notation connue, ΔV la somme des trois dérivées secondes que nous venons de calculer ; il vient :

$$\Delta V = 3 \sum m \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{r^5} - 3 \sum \frac{m}{r^3}$$

$$= 3 \sum \frac{m}{r^3} - 3 \sum \frac{m}{r^3} = 0.$$

Le potentiel newtonien satisfait donc, dans l'espace à trois dimensions, à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ *en tout point distinct des points attirants.*

Pareillement, *le potentiel logarithmique satisfait, dans le plan, à l'équation de Laplace* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ *que l'on écrit encore* $\Delta V = 0$. On a en effet pour ce potentiel :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2 \sum m \frac{(a-x)^2}{r^4} - \sum \frac{m}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2 \sum m \frac{(b-y)^2}{r^4} - \sum \frac{m}{r^2}.$$

Ajoutons membre à membre en remarquant que

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 = r^2,$$

nous aurons :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

On peut, de même, définir, dans l'espace à n dimensions, un potentiel analogue au potentiel newtonien dans l'espace à trois dimensions et au potentiel logarithmique dans le plan. Appelons $x_1, x_2, \ldots x_n$ les coordonnées d'un point de l'espace à n dimensions ; le potentiel en question sera une fonction V de n variables satisfaisant à l'équation :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} = 0,$$

qui est la généralisation de l'équation de Laplace. Le potentiel ainsi obtenu correspond à une attraction proportionnelle à $\frac{1}{r^{n-1}}$; r désigne toujours la distance du point attiré $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à un point attirant $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et est donné par l'expression :

$$r^2 = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots\ldots + (x_n - a_n)^2.$$

5. Limites supérieures des dérivées de $\frac{1}{r}$. — Avant d'aller plus loin, nous allons indiquer des limites supérieures pour quelques-unes des dérivées de $\frac{1}{r}$. Ces limites supérieures nous seront utiles dans la suite. On a :

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = \frac{a - x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} = \frac{3(a - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{\partial^3\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^3} = 15\frac{(a - x)^3}{r^7} - 9\frac{a - x}{r^5},$$