Soit (fig. 3) T un volume attirant, $d\tau'$ un élément de ce volume, P son centre de gravité, a la distance de P à l'origine O des coordonnées, M le point attiré, r la distance PM et ρ la distance OM. On a :

$$\rho - a < r < \rho + a,$$

et, par suite, on peut poser :

$$r = \rho + \theta a,$$

θ étant compris entre -1 et $+1$.

Le potentiel V a pour expression :

$$V = \int \frac{\mu'}{\rho + \theta a} d\tau'.$$

Formons le produit ρV :

$$(4) \qquad \rho V = \int \frac{\mu' \rho}{\rho + \theta a} d\tau' = \int \mu' d\tau' - \int \frac{\mu' \theta a d\tau'}{\rho + \theta a},$$

les intégrales étant étendues au volume T.

De l'égalité (4), on tire :

$$\rho V - \int \mu' d\tau' = - \int \frac{\mu' \theta a d\tau'}{\rho + \theta a}.$$

On voit sans peine que le second membre de cette dernière égalité tend vers 0 quand ρ augmente indéfiniment. On a donc :

$$\operatorname{Lim} \left(\rho V - \int \mu' d\tau' \right) = 0,$$

ou

$$\operatorname{Lim} \rho V = \int \mu' d\tau' = M,$$

en appelant M la masse attirante totale.

Le raisonnement s'étend sans aucune modification au cas d'une surface attirante, d'une ligne attirante ou d'un ensemble de volumes, de surfaces et de lignes.

8. — Passons au cas du potentiel logarithmique dans le plan. Soit S une surface plane attirante. Le potentiel V en un point M

de son plan (fig. 4) a pour expression, en reprenant les notations connues :

$$V = \int \mu' \log \frac{r_0}{r} \, d\omega'.$$

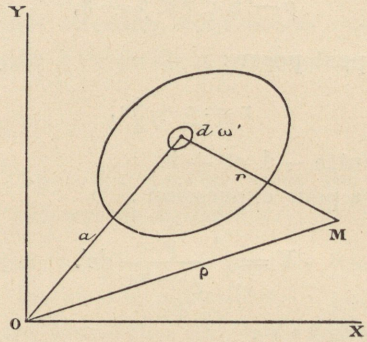

Fig. 4.

Voyons comment V se comporte à l'infini. Posons :

$$V_0 = \log \frac{r_0}{\rho} \int \mu' d\omega' = M \log \frac{r_0}{\rho},$$

M désignant la masse attirante totale et ρ la distance du point M à l'origine. Formons la différence $V - V_0$:

$$V - V_0 = \int \mu' \log \frac{\rho}{r} \, d\omega' = - \int \mu' \log \frac{\rho + \theta a}{\rho} \, d\omega'.$$

Or on a :

$$\left| \log \frac{\rho + \theta a}{\rho} \right| = \left| \log \left(1 + \frac{\theta a}{\rho} \right) \right| < \left| \frac{\theta a}{\rho} \right| < \frac{a}{\rho} < \frac{\alpha}{\rho},$$

α désignant une limite supérieure de a ; on en conclut :

$$\left| V - V_0 \right| < \left| \int \mu' \frac{a}{\rho} \, d\omega' \right| < \frac{\alpha}{\rho} \, \mu_0 \int d\omega',$$

μ_0 étant une limite supérieure de μ'. Si l'on désigne par S l'aire de la surface attirante, on a :

$$S = \int d\omega',$$

et l'on voit que :

$$\left| V - V_0 \right| < \frac{\alpha}{\rho} \mu_0 S;$$

par conséquent :

$$\text{Lim} \left| V - V_0 \right| = 0,$$

quand ρ augmente indéfiniment.

On peut donc écrire l'égalité asymptotique :

$$V \backsim M. \log \frac{r_0}{\rho}.$$

9. Potentiel newtonien d'une surface sphérique homogène. — Nous allons, à titre d'exemples, calculer le potentiel dans quelques cas simples.

Soit une surface attirante sphérique, homogène, de densité μ'; soient O son centre, a son rayon (fig. 5) et M, un point extérieur,

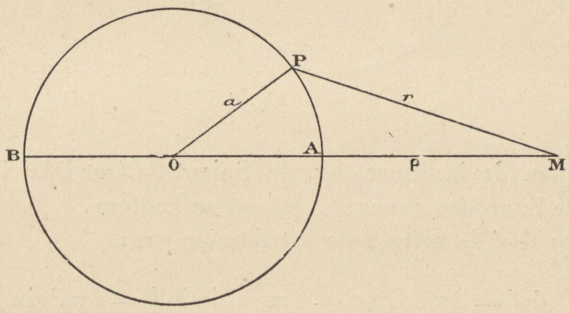

Fig. 5.

pour lequel nous voulons avoir la valeur du potentiel. Soit P le centre de gravité d'un élément $d\omega'$ de la sphère; menons le diamètre AB issu de M. Posons :

$$MP = r; \quad OP = a; \quad OM = \rho; \quad \text{angle } MOP = \theta.$$

Le potentiel en M a pour valeur :

$$V = \int \frac{\mu'}{r} d\omega',$$