

6. — COMPENSAZIONI

6.1 — LA SEPARAZIONE DEGLI ERRORI ACCIDENTALI E SISTEMATICI.

Le formule usate per le compensazioni dei concatenamenti solari e che saranno riportate successivamente, sono sostanzialmente quelle a suo tempo date dal Santoni. Prima però di esporle conviene riepilogare i criteri fondamentali che hanno portato alla separazione degli errori accidentali da quelli sistematici. È questo, com'è noto, il grande dilemma della triangolazione aerea.

Innanzitutto è opportuno chiarire se si tratta di poligonazione aerea (come alcuni autori scrivono) o di triangolazione aerea. A noi sembra indubbio che un siffatto concatenamento sia una triangolazione a catena e non una poligonazione. Infatti il concetto di poligonazione è legato alle misure indipendenti delle lunghezze di ciascun lato, restando limitato all'azimut il trasferimento dei valori

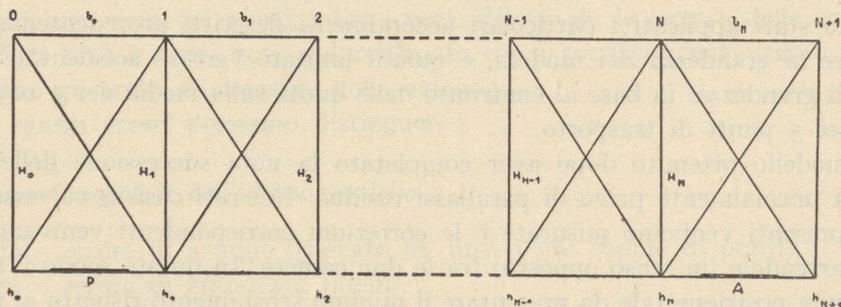


Fig. 11 — I triangoli della triangolazione aerea a catena.

angolari, mentre nel caso in esame si tratta di una catena di triangoli che si sviluppano approssimativamente in un piano verticale, nella quale i lati comuni sono alternativamente i lati verticali H e le basi aeree b (fig. 11).

A partire da una misura di grandezza P (base di partenza) si giunge ad un controllo di grandezza su A (base di arrivo) senz'altro ausilio che la misura degli angoli formati con le basi aeree dalle direzioni ai punti ausiliari. Siano questi angoli idealmente misurati con goniometri o realizzati per via ottica o meccanica, si tratta sempre di angoli misurati e di triangoli conclusi. I lati intermedi di passaggio sono le distanze approssimativamente verticali fra i punti di presa e i punti ausiliari scelti arbitrariamente sul terreno (nell'immagine fotografica di essi) e le basi aeree approssimativamente orizzontali.

Nell'apparato di restituzione (almeno in molti di essi) potremmo ricavare gli elementi $X Y Z$ che fissano nello spazio la posizione dei vertici (punti di presa $0, 1, 2, \dots$). Si preferisce però agire sui punti di collegamento (punti ausiliari h_1, h_2, \dots) per ciascuno dei quali si misurano le tre coordinate strumentali $X Y Z$ come si è visto effettuare nell'esperimento.

Secondo il procedimento del Grüber si usa appunto trasferire la grandezza da un modello al seguente per uguagliamento dei lati verticali dei modelli adiacenti. Si usa così ancora la visione stereoscopica per controllare la doppia collimazione, con tutti i ben noti vantaggi che ne derivano, in special modo se i fotogrammi non sono eccessivamente nitidi o comunque sprovvisti di particolari atti ad una buona identificazione monoculare.

L'uso delle camere grandangolari, da cui deriva la possibilità di scegliere due punti laterali (di collegamento ausiliari nella zona di triplice sovrapposizione) situati a distanza reciproca che può essere superiore alla H , può consentire di effettuare il trasporto di grandezza fra due modelli successivi, usando le distanze y per i due punti come elemento di comparazione.

Diremo subito che anche se la grandezza y presa in esame è superiore alla N , la sua efficacia peraltro sembra inferiore. Infatti in primo luogo la comparazione è affidata alla perfetta identificazione *planimetrica* dei due punti (nel senso delle Y) in secondo luogo vengono messe in giuoco zone marginali del campo nelle quali il grado di definizione fotografico è minore. Può essere conveniente tener conto di entrambe le provenienze dando a nostro avviso maggior peso al controllo in quota sul punto nadirale. Nelle nostre esperienze pur avendo esaminato 5 punti abbiamo utilizzato soltanto il controllo in quota. Pensiamo che per far entrare in giuoco gli elementi y occorra disporre di fotogrammi eseguiti in migliori condizioni.

Da quanto sopra è esposto risulta dunque che per quanto riguarda il trasporto di grandezza da un modello al successivo il metodo solare non differisce dagli altri ed è quindi soggetto alle stesse cause di errore siano esse accidentali che sistematiche.

Eguale considerazione può essere fatta nei riguardi del trasporto di K , tenendo presente che nel metodo solare il miglior controllo dell'assetto può ridurre l'entità degli errori accidentali dovuti a dislivelli sui punti nadirali.

Premesso ciò torniamo all'argomento della separazione degli errori sistematici da quelli accidentali. Per quanto il problema sia di difficile e forse, in senso assoluto, impossibile soluzione, è ovvio che occorrono elementi noti sovrabbondanti per impostarlo.

Se in una strisciata disponiamo soltanto dei punti sufficienti a formare ed orientare il primo modello, e di un solo punto di controllo nell'ultimo modello, è impossibile impostare una qualsiasi equazione atta a separare gli errori di trasporto di grandezza accidentali dai sistematici.

Se per contro disponiamo di un minimo di punti di controllo atti a rilevare l'errore di grandezza propria dell'ultimo modello $\frac{\Delta b_N}{b_N}$, e nel contempo l'errore di lunghezza ΔX , sarà possibile impostare una equazione secondo criteri razionali atta a separare i due errori. Infatti, tenuto conto del residuo errore di grandezza del primo modello, un perfetto accordo dovrà sussistere fra l'errore di lunghezza ΔX e l'errore di grandezza dell'ultimo modello $\frac{\Delta b_N}{b_N}$, nel caso che essi dipendano esclusivamente da un errore sistematico di trasporto di grandezza. Se invece ri-

levassimo un errore di lunghezza e nel contempo nessun errore di grandezza dell'ultimo modello, dovremmo logicamente supporre che si siano verificati errori di trasporto di grandezza di carattere accidentale la cui somma sia risultata 0. Potremmo anche logicamente supporre che essendo risultato, ad esempio, positivo l'errore ΔX , gli errori accidentali di trasporto di grandezza siano stati preponderatamente positivi nella prima parte del percorso poichè il loro effetto ha influito su un numero maggiore di lati. Con la stessa logica supposizione la correzione dell'errore ΔX non dovrebbe essere lineare, ma quadratica con segno addirittura opposto a quello che risulterebbe considerando ΔX causata da errore sistematico. Poichè d'altra parte ripartire un determinato errore di lunghezza ΔX con legge lineare equivale ad apportare una correzione di $1/2 \Delta X$ a metà del percorso, mentre applicando la legge quadratica si apporterebbe a metà percorso $1/4 \Delta X$ è evidente che una differente attribuzione di tutto l'errore comporta un eventuale errore massimo di $1/4 \Delta X$ nel punto più sensibile.

Così stando le cose è ovvio che nel favorevole caso di errori di chiusura (in questo caso ΔX) relativamente piccoli, l'applicazione di una o dell'altra formula non pregiudica sostanzialmente i risultati finali. Ora è precisamente da tener presente che gli errori accidentali allo stato attuale della tecnica sono sempre di entità modesta, mentre l'effetto più notevole è da attendersi anche da modestissimi errori sistematici. Ciò è spiegato dalla stessa formula.

Se, per portare un esempio semplice, facciamo riferimento al trasporto di azimut, e supponiamo che si manifestino nel concatenamento due errori, uno sistematico e l'altro accidentale, pari ciascuno a 1° , in una catena di 25 vertici avremo nell'ultimo fotogramma i seguenti errori :

$$\Delta K_a = \pm 5^\circ$$

$$\Delta K_s = 25^\circ$$

In presenza quindi di un errore sistematico, il suo effetto deve manifestarsi sempre nel risultato finale, anche se esso è stato esaltato o diminuito dall'errore accidentale. In altri termini un errore sistematico ΔK deve provocare un errore ΔY sensibile e nel contempo il fotogramma ultimo deve rivelare un disorientamento sensibile, e cioè in accordo di segno e prossimo in valore assoluto.

Queste considerazioni sono state alla base del procedimento che così riassumiamo :

- 1^o) — l'errore sistematico, qualunque esso sia, viene calcolato in base al suo effetto nell'interno dell'ultimo modello ;
- 2^o) — in base all'entità e segno della deformazione presa in esame nel detto modello viene calcolato il coefficiente di correzione sistematico, e quindi corretta la catena ;
- 3^o) — l'errore residuo generale, finale, riferito alla rete geodetica, viene attribuito a errori accidentali e compensato linearmente.

Questa prassi può essere applicata con qualsiasi metodo. Nel metodo solare, basato essenzialmente sul trasporto di K , si prende in esame il ΔK dell'ultimo modello.

6.2 — COMPENSAZIONE IN X .

Chiamando con δX la correzione totale di compensazione essa risulterà comprensiva dalle seguenti correzioni:

- δX_g dovuta ad errori sistematici di trasporto di grandezza;
- δX_k dovuta ad errori sistematici di trasporto di azimut;
- δX_a dovuta ad errori accidentali;

secondo la:
$$\delta X = \delta X_g + \delta X_k + \delta X_a.$$

6.2I — Indicando con $\frac{\Delta b_N}{b_N}$ e $\frac{\Delta b_o}{b_o}$ rispettivamente gli errori relativi di grandezza dell'ultimo e del primo modello (quest'ultimo sempre piuttosto piccolo per ovvie ragioni) ricavabili dai confronti con le coordinate dei punti determinati a terra, sarà $\frac{\Delta b_N}{b_N} - \frac{\Delta b_o}{b_o}$ l'errore relativo di grandezza dell'ultimo modello depurato dall'errore di grandezza riscontrato nel primo modello, cioè l'errore di grandezza dell'ultimo modello causato dal solo concatenamento.

Se ora indichiamo con C_2 l'errore sistematico relativo di trasporto di grandezza da uno stereogramma al successivo, l'errore proprio dello stereogramma n^{mo} sarà $n C_2$ per cui, per l'ultimo stereogramma:

$$N C_2 = \frac{\Delta b_N}{b_N} - \frac{\Delta b_o}{b_o}$$

la quale così scritta:

$$C_2 = \frac{\frac{\Delta b_N}{b_N} - \frac{\Delta b_o}{b_o}}{N}$$

permette il calcolo di C_2 .

Poichè l'errore sistematico totale dovuto a C_2 dopo n stereogrammi è $\frac{n(n-1)}{2} C_2$ ne deriva, per n piuttosto grande, che l'influenza nella componente X di tale errore sarà di conseguenza:

$$\delta X_g = \frac{n^2}{2} C_2.$$

Se invece di riferirsi ai modelli successivi ci riferiamo a percorsi unitari basta nelle precedenti porre $n = X$ per ottenere come errore sistematico unitario di trasporto di grandezza:

$$C_2 = \frac{\frac{\Delta b_N}{b_N} - \frac{\Delta b_o}{b_o}}{X}$$

e un errore totale in X di :

$$\delta X_g = \frac{C_2}{2} X^2 .$$

Il calcolo dell'ascissa X si effettua con la :

$$X = X_N - X_o$$

nella quale le ascisse X_N e X_o non si riferiscono ai punti di riporto iniziale e finale ma ai baricentri dei punti preparati a terra negli stereogrammi iniziale e finale.

6.22 — Indicando con ΔK_N e ΔK_o gli errori in azimuth riscontrati rispettivamente nell'ultimo e nel primo modello, anche questi ricavati dal confronto con le coordinate dei punti preparati a terra, sarà :

$$\Delta K_u = \frac{\Delta K_N - \Delta K_o}{X}$$

l'errore sistematico unitario di trasporto di azimuth.

L'influenza che ΔK_u porta nella X di un qualsiasi punto sarà ovviamente espressa dalla :

$$\delta X_k = \Delta K_u X d Y$$

in cui come già sappiamo X esprime l'ascissa del punto in quistione a partire dal baricentro delle basi di partenza e :

$$d Y = Y - Y_n$$

esprime la ordinata del punto in esame rispetto al nadir del punto di presa del fotogramma n ; in pratica il $d Y$ coincide con la ordinata parziale del punto in esame rispetto ad un asse parallelo all'asse delle X che passa per il punto di riporto n della coppia $n, n + 1$.

6.23 — Evidentemente facendo dipendere il C_2 dalla grandezza depurata dell'ultimo modello, si verifica un residuo δx_R dal confronto tra ascisse strumentali corrette per l'effetto del C_2 e del ΔK_u e le ascisse provenienti dalla preparazione a terra. Secondo i concetti già espressi si calcolerà allora il coefficiente :

$$C_x = \frac{\delta x_R}{X}$$

con cui correggere linearmente l'errore residuo :

$$\delta X_a = C_x X .$$

6.3 — COMPENSAZIONE IN Y.

Chiamiamo con δY la correzione totale di compensazione per le ordinate dei punti, anche qui essa risulterà composta dalle correzioni:

- δY_g dovute agli errori sistematici di trasporto di grandezza;
- δY_k dovuta agli errori sistematici di trasporto di azimut;
- δY_a dovuta agli errori accidentali;

$$\delta Y = \delta Y_g + \delta Y_k + \delta Y_a.$$

L'errore sistematico di trasporto di grandezza C_2 per un punto di ascissa X si ripercuote linearmente sulle ordinate e dipende dalla ordinata $d Y$ (precedentemente definita) del punto in esame:

$$\delta Y_g = C_2 X d Y.$$

Evidentemente invece l'influenza sull'ordinata dell'errore sistematico di trasporto di azimut ΔK_u è espressa da una legge analoga a quella del C_2 nella ascissa per cui

$$\delta Y_k = \frac{\Delta K_u}{2} X^2.$$

Secondo le considerazioni già fatte per la compensazione della X , dopo che sono state apportate le due correzioni precedenti alle ordinate restituite dei singoli punti dell'ultimo modello, dal confronto con le ordinate provenienti dalle determinazioni a terra si otterrà un residuo δy_R che servirà a determinare il coefficiente:

$$C_v = \frac{\delta y_R}{X}$$

col quale si correggono le ordinate dei vari punti applicando la:

$$\delta Y_a = C_v X.$$

6.4 — COMPENSAZIONE IN QUOTA.

La compensazione altimetrica conviene eseguirla per modello, considerando separatamente dapprima la compensazione dei punti nadirali di trasporto e poi quella dei punti generici. Tali correzioni di compensazione comprendono la correzione degli errori sistematici di torsione e di flessione e una eventuale correzione residua lineare.

6.4I — COMPENSAZIONE IN QUOTA DEI PUNTI DI TRASPORTO.

Considerato un modello generico n , si può subito trovare per esempio quale è l'errore in azimut con la:

$$\Delta K_n = (n - 1) \Delta K_m$$

in cui ΔK_m è l'errore di trasporto di azimuth da un modello al successivo. Calcolato ΔK_n si ottengono i valori di inclinazione trasversale $\Delta \omega$ e inclinazione longitudinale $\Delta \varphi$ con le:

$$\Delta \omega = \frac{d \omega}{d K} \Delta K_n \qquad \Delta \varphi = \frac{d \varphi}{d K} \Delta K_n$$

poichè sono già noti i coefficienti differenziali $\frac{d \omega}{d K}$ e $\frac{d \varphi}{d K}$.

Dai valori angolari $\Delta \omega$ e $\Delta \varphi$ si passa all'errore parziale sistematico in quota dovuto alla torsione ed alla flessione con le:

$$\Delta h_\omega = \Delta \omega b_y \qquad \Delta h_\varphi = \Delta \varphi b_x$$

essendo b_y e b_x le componenti secondo gli assi coordinati della congiungente i punti di riporto dei fotogrammi della coppia considerata.

Effettuati tutti i calcoli per trovare, modello per modello, le correzioni in quota, si sommano progressivamente le correzioni parziali ottenute separatamente per i due effetti onde ottenere ΔH_ω e ΔH_φ per ogni punto di riporto e poi si sommano progressivamente i due effetti per ottenere $\Delta H_{\omega\varphi}$ per ogni punto di riporto.

6.42 — COMPENSAZIONE IN QUOTA DEI PUNTI RESTITUITI.

Con riferimento alla $\Delta H_{\omega\varphi}$ del punto di riporto che precede nel concatenamento ogni stereogramma, ed alla torsione $\Delta \omega$ ed alla flessione $\Delta \varphi$ di ogni modello, si procede per ogni modello al calcolo delle correzioni alle quote restituite per i singoli punti. A tale uopo si usano i valori delle rotazioni ΔK_n che competono a ciascun modello e che sono già note.

Prima di procedere alla compensazione in quota dei punti restituiti, ed allo scopo di accelerare questa operazione pur effettuandola con tutto il rigore dovuto al metodo, si prendono subito in esame tutti i punti noti dell'ultimo stereogramma per i quali con riferimento alla $\Delta H_{\omega\varphi}$ ed alle $\Delta \omega$ e $\Delta \varphi$ dell'ultimo punto di riporto (calcolate come si è spiegato in precedenza) si sono calcolate le correzioni alle quote restituite per effetto della sola rotazione ΔK subita nel concatenamento dell'ultimo modello; in possesso di tali correzioni seguono subito le quote compensate.

Il divario δH_R con le quote note ci fornisce il coefficiente:

$$C_H = \frac{\delta H_R}{X}$$

con cui correggere linearmente l'errore residuo.

6.5 — RISULTATI OTTENUTI DOPO LA COMPENSAZIONE DEI CONCATENAMENTI ESPERIMENTATI.

Con riferimento alle coordinate e quote trigonometriche dei punti di controllo, sono stati determinati gli errori residui, risultanti dopo la compensazione, per ogni singolo concatenamento.

Dall'esame degli errori residui risultanti dopo tale compensazione di ogni singolo concatenamento si sono rivelati errori accidentali molto sensibili. La causa principale di tali errori risiede, nel caso oggetto, nella mediocre definizione fotografica del materiale a disposizione. È pertanto di particolare interesse esaminare quali possibilità offre il metodo solare per giungere ad un affinamento di risultati attraverso una riduzione dell'effetto di questi errori accidentali.

Orbene: il metodo solare si presta in maniera particolare per ridurre tutti i percorsi ad un unico percorso angolare, il che permette di mettere in evidenza l'influenza degli errori accidentali indipendentemente dall'assetto angolare delle camere. Gli errori accidentali che allora ancora si manifestano dipenderanno:

- 1°) da errori di trasporto di quota;
- 2°) da errori di trasporto di grandezza;
- 3°) da errori di trasporto di bz ,

e queste cause di errori dipenderanno quasi esclusivamente dalla finezza con la quale si possono eliminare le parallassi verticali ($p y$), e le parallassi orizzontali ($p x$) nella misura delle quote.

L'ulteriore riduzione di tali errori accidentali residui sarà perciò ottenuta facendo la media dei vari concatenamenti effettuati per lo stesso tratto.

Nel caso oggetto, la prassi della riduzione di tutti i percorsi ad un unico percorso angolare è stata la seguente.

Utilizzando i diversi concatenamenti compensati, si è stabilito il K medio di ciascun fotogramma sulla base dei quattro concatenamenti eseguiti. Rispetto a questo K medio, il quale presumibilmente si avvicina al valore vero, si è stabilito il corrispondente valore correttivo dK per ciascun fotogramma. Come è noto, l'effetto di un dK è combinato, nel metodo solare, con un $d\omega$ e un $d\varphi$ secondo rapporti incrementali noti. Mentre il dK genera un dy , il $d\varphi$ genera una flessione (uguale a dz sull'asse) e il $d\omega$ una torsione, e quindi una ulteriore dz fuori dell'asse. È stato quindi possibile ridurre, a posteriori, ciascun concatenamento a quello che si sarebbe verificato con il K medio, cioè ad un unico percorso angolare, ottenendo in definitiva altrettanti concatenamenti indipendenti dall'assetto angolare delle camere, e quindi indipendenti da eventuali errori causati dalla connessione solare.

A titolo di esempio riportiamo gli errori medi in quota dei quattro percorsi relativi al tratto 31-4 quali si ottenevano dopo la compensazione e prima della riduzione ad un unico percorso angolare.

| TRATTO 31-4 | ΔH (m) |
|-------------|----------------|
| 1° percorso | $\pm 4,70$ |
| 2° » | $\pm 3,42$ |
| 3° » | $\pm 5,16$ |
| 4° » | $\pm 7,80$ |

e gli stessi errori medi dopo l'applicazione dei valori correttivi di K :

| TRATTO 31-4 | ΔH (m) |
|-------------|----------------|
| 1° percorso | $\pm 3,35$ |
| 2° » | $\pm 3,00$ |
| 3° » | $\pm 4,30$ |
| 4° » | $\pm 4,80$ |

Ne risulta una evidente riduzione degli errori . Le differenze fra i vari percorsi dipendono ora ovviamente dai soli errori accidentali ; la media dei 4 percorsi ci porta ai valori definitivi.

Gli errori medi relativi alla media dei quattro concatenamenti sono risultati

| T R A T T O | ΔX | ΔY | ΔH |
|------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| dal fotogramma 31 al fotogramma 4 | $\pm 2,5$ ^m | $\pm 2,0$ ^m | $\pm 3,5$ ^m |
| dal fotogramma 57 al fotogramma 30 | $\pm 4,0$ | $\pm 5,0$ | $\pm 3,0$ |

dei quali appare la efficace riduzione dell'effetto degli errori accidentali.

Nell'esame degli scarti di quota (dz) si tenga presente che essi riflettono anche gli errori di trasporto di grandezza, e che nel metodo solare, in confronto dei metodi statoscopici, gli effetti di tali errori sono ridotti alla metà poichè l'accrescimento del lato verticale per cause accidentali è, nel metodo solare, ugualmente ripartito fra bz e dz , mentre con il metodo statoscopico influisce totalmente su dz .

Concludiamo con il dire che quando si dispone di materiale non buono, l'influenza degli errori accidentali è molto grande, e in questo caso il metodo solare, con la riduzione di più percorsi ad un unico percorso angolare, giustifica pienamente il concetto di assumere la loro media come valore definitivo del concatenamento.

I risultati effettivamente conseguiti in questi nostri esperimenti (senza cioè alcun miglioramento ipotetico) sono pienamente accettabili per le applicazioni pratiche, e si può aver piena fiducia nell'applicazione del metodo solare, sicuri di non dover temere errori superiori alle tolleranze anche quando il lavoro dovesse svilupparsi in condizioni poco favorevoli.

6.61 — OSSERVAZIONI FINALI.

Un procedimento che secondo lo stesso Santoni potrebbe essere adottato col metodo solare al fine di ottenere in un primo tempo i valori K con maggiore precisione, potrebbe consistere nell'effettuare preliminarmente due o più concatenamenti angolari, senza cioè effettuare il trasferimento di grandezza. Il tempo

necessario all'esecuzione di questi concatenamenti angolari è molto inferiore a quello di un concatenamento normale perchè non viene effettuata la lettura ai punti di riporto. Una volta compensati i vari concatenamenti ed effettuate le medie dei vari K ottenuti per ciascun fotogramma, si passerebbe al concatenamento definitivo nel quale i K (e conseguentemente i φ ed ω) non dovrebbero essere più variati. Gli errori di chiusura in azimuth verrebbero ridotti al minimo.

Usando questa prassi la terna dei valori di entrata $K' \varphi' \omega'$ potrebbe essere calcolata a partire dalla condizione nella quale l'asse del periscopio giace nel piano solare; e ciò sia con l'uso del calcolatore che col calcolo numerico di un semplice triangolo rettangolo sferico.

Verrebbe così soppresso il concatenamento nadirale.

6.62 — Dalla teoria del metodo solare, brevemente riassunta in precedenza, emerge che le condizioni del metodo sono tanto peggiori quanto più il Sole si allontana dallo zenit poichè negli incrementi differenziali $\frac{d\varphi}{dK}$ e $\frac{d\omega}{dK}$ compare $\tan z_s$ (vedi 1.31).

Ciò significa che nel caso di Sole molto alto i valori φ ed ω sono particolarmente indipendenti da errori di trasporto di K . D'altra parte dipendendo rispettivamente $d\varphi$ e $d\omega$ da $\sin \sigma$ e $\cos \sigma$ è conveniente, quando il Sole è basso, scegliere rotte di volo prossime alla direzione del Sole. In questo caso il rapporto $\frac{d\varphi}{dK}$ è tendenzialmente nullo e quindi nulla la flessione per qualsiasi errore di K . Nei casi più sfavorevoli si può effettuare eventualmente il controllo di ω col metodo normale. Si conserverebbe così la possibilità direttiva del Sole nei riguardi della flessione generale del modello la quale, come è noto, è causa delle maggiori deformazioni altimetriche.